

По сравнению с полноконтактным способом многоплоскостной выглядит предпочтительнее в отношении напряженного состояния фиксатора и микроподвижности в зоне перелома. Основное же его преимущество состоит в большей надежности фиксации в ходе восстановительного периода, когда проявляется эффект проскальзывания между костной тканью и крепежными деталями. В такой ситуации может произойти отход планки, установленной посредством параллельных шурупов, вплоть до полной потери фиксации. Многоплоскостной фиксатор исключает подобную опасность за счет шурупов разных направлений.

Список литературы: 1. Gardner T.N., Simpson H., Kenwright J. Rapid application fracture fixators – an evaluation of mechanical performance. – *Clinical Biomechanics*, 2001. – 16. – P. 151-159. 2. Weiner S., Traub W., Wagner H.D. Lamellar Bone: Structure–Function Relations. – *J. of Struct. Biology*. 1999. – 126. – P. 241-255. 3. Choi K., Kuhn J.L., Ciarelli M.J., Goldstein S.A. The elastic moduli of human subchondral, trabecular, and cortical bone tissue and the size-dependency of cortical bone modulus. – *J. Biomech*. 1990. – 23(11). – P. 1103-1113. 4. Rho J.Y., Ashman R.B., Turner C.H. Young's modulus of trabecular and cortical bone material: ultrasonic and microtensile measurements. – *J. Biomech*. 1993. – 26(2). – P. 111-119. 5. Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2002. – 544 с.

Поступила в редколлегию 12.11.2010.

УДК 620.171.3, 53.072.11

А.А.ТЕСЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук, доцент, Национальный университет гражданской защиты Украины, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ФОТОУПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ, ОБЛУЧЕННЫХ ИК-ЛАЗЕРОМ.

У роботі розглядається застосування методу кінцевих фотопружних елементів до дослідження залишкових напружень у кристалах опромінених ІК-лазером. Визначені залишкові напруження та помилка в їх значеннях. Доведено, що в припущенні двовимірних напружень величина помилки припустима, а сам метод визначення коректний.

Application of photoelasticity finite elements method is investigated for research of residual stresses in the crystals that radiation-exposed infra-red laser. Residual stresses and mistakes are obtained. In supposition of two-dimensional stresses, the error is small, and the method is correct.

1 Введение. В настоящее время наблюдается повышение интереса к методу фотоупругости. Разрабатываемые методологии и устройства находят применение, например, при производстве стекол для TFT мониторов. Имеется два направления развития метода фотоупругости. Первое – развитие методологии и автоматизации измерений поляризационных параметров, второе – развитие методов интерпретации измерений. В данной статье представлено вто-

рое направление. В работах [1-8] методами имитационного моделирования активно изучались измерительные методы в рамках метода фотоупругости. Изучению были подвергнуты отдельные измерительные схемы. Доказана их состоятельность. В данной работе результаты этих исследований применяются.

2 Актуальность рассматриваемой проблемы. В предлагаемой работе применяются результаты исследований интерпретации измерений проведенные в [1-8]. Отличительной чертой предлагаемого подхода является тот факт, что не делается никаких предположений о распределении напряжений или симметрии свойств среды. То есть все соотношения записываются для общего случая анизотропной задачи. Работа продолжает исследование, представленное в [1, 2, 5]. В рамках этого подхода результат ищется в виде решения задачи метода конечных элементов. Это дает возможность учесть граничные условия и условия равновесия напряжений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Будем называть этот способ решения задачи фотоупругости методом конечных фотоупругих элементов (МКФЭ). В работах [1-8] были разработаны подходы к реализации устойчивых к неточности исходных данных методов пьезооптических измерений и обработки результатов, использующих МКФЭ.

3 Метод конечных фотоупругих элементов. С точки зрения МКЭ, метод конечных фотоупругих элементов - новая модификация метода, в которой элементы обладают не только упругими, но и пьезооптическими свойствами. Непосредственно наработки МКЭ переносить в метод фотоупругости нецелесообразно, так как МКЭ в теории упругости твердого деформируемого тела развивался для задач с совместными деформациями (выполняются дифференциальные условия совместности деформаций [1, 5]). Главным достоинством метода фотоупругости является его способность определять остаточные напряжения. Условие совместности деформаций в присутствии остаточных напряжений не выполняется. В работах [1, 2] описываются основы подхода к поляризационно-оптической томографии с использованием метода конечных элементов. Подход состоит в учете граничных условий и условий равновесия напряжений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Традиционные вариационные постановки МКЭ содержат это условие и в этом случае неприменимы. В данной работе использовано условие равенства нулю дивергенции:

$$\operatorname{div}(\vec{\sigma}_{i*}) = 0, \quad (1)$$

где $\vec{\sigma}_{i*}$ – вектор силы с координатами $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$; σ_{ij} – тензор напряжений. Для любой области внутри тела выполняется соотношение:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{\sigma}_{i*}) dV = 0. \quad (2)$$

Разобьем тело на области (конечные элементы) [6]. Для каждого конечного элемента будет выполняться условие (2). σ_{ij} в произвольной точке тела будет представлено интерполяционной формулой для соответствующего конечного элемента [6].

$$\sigma_{ij} = \sum_{\ell=1}^m N_{\ell} \sigma_{ij}^{\ell}, \quad (3)$$

где N_{ℓ} – функции формы элемента; σ_{ij}^{ℓ} – искомые величины напряжений в узлах конечных элементов, m – количество узлов в элементе, ℓ – номер узла в элементе. Соотношение (2) тогда будет записано в виде

$$\iiint_V \sum_{j=1}^3 \sum_{\ell=1}^m \left(\sigma_{ij}^{\ell} \frac{\partial N_{\ell}}{\partial x_j} \right) dV = 0. \quad (4)$$

Узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ} для всех узлов могут определяться решением системы уравнений (4), записанных для всех элементов и уравнений фотоупругости

$$A_{ij}^{\vec{n}} \sigma_{ij}^{\ell} = \delta^{\vec{n}} \cos(2\varphi^n), \quad (6)$$

определенных для направления \vec{n} в узле ℓ . Уравнения (6) представляют собой уравнения, связывающие напряжения и измеряемые параметры описанные, например, в [3]. В формуле (6): $\delta^{\vec{n}}$ – оптическая разность хода; φ^n – оптический параметр угла изоклины; $A_{ij}^{\vec{n}}$ – коэффициенты, являющиеся функцией пьезооптических коэффициентов, показателя преломления, толщины просвечиваемого слоя, ориентации направления просвечивания и ориентации системы координат, в которой определяются напряжения. Решением систем линейных уравнений (5,6), а так же граничных условий, получены искомые узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ} в этой статье.

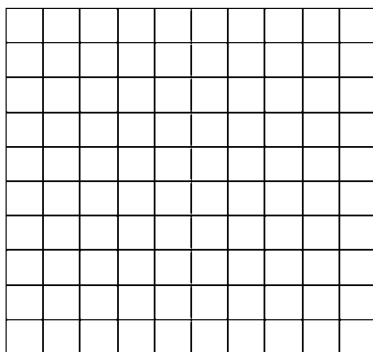


Рисунок 1 – Разбиение квадратной пластины на прямоугольные четырехузловые изопараметрические элементы

4 Эксперимент. Пластина кристалла калий хлор (KCl- кристалл с кубической симметрией кристаллической решетки) была облучена мощным, промышленным ИК-лазером. Пластина имела размеры 60х60х10 см. Лазерный

луч мощностью 1 киловатт был направлен в центр пластины перпендикулярно. Лазерный луч был сфокусирован в пятно диаметром 2 мм и действовал 2 минуты. Вследствие термических перегрузок в пластине возникли остаточные напряжения. Были произведены пьезооптические измерения и определены остаточные напряжения. Предварительно плоский кристалл был размечен квадратной сеткой, соответствующей конечно-элементному разбиению пластины (рис. 1). Таким образом, разбиение пластины производилось на прямоугольные четырехузловые изопараметрические элементы, описанные в [9].

Измерения производились в местах, соответствующих узлам элементов. Таким образом, измерения давали данные для соотношений фотоупругости, связывающие напряжения в отдельном узле с пьезооптическими параметрами. Результаты расчетов показаны на рис. 2, 3.

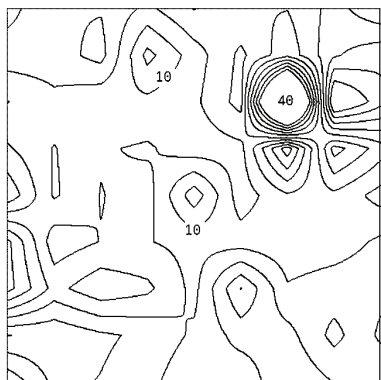


Рисунок 2 – Распределение σ_{11} (кг/см²)

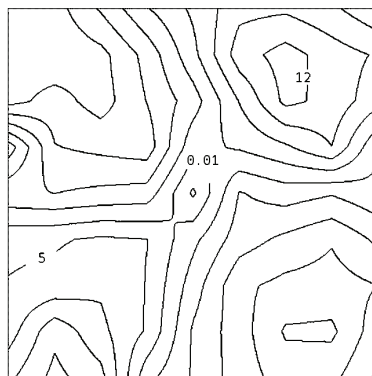


Рисунок 3 – Распределение σ_{11} (кг/см²)

5 Обсуждение результатов. Полученные результаты несколько похожи на результаты полученные в [1] методами моделирования. По полученному распределению напряжений была построена имитационная модель методами находящимися в точном соответствии с методами в [5]. В точном соответствии с [5] были определены погрешности в определении напряжений. В среднем они оказались на уровне 2-7%. Это очень маленькая ошибка. Оценивая ее, надо помнить, что она сделана для имитационной модели в которой не учитывается некоторая трехмерность в распределении напряжений.

6 Выводы. На основе имитационной модели восстановлен внешний вид монокристаллической пластины между скрещенными поляроидами. В [10] размещен анимированный вариант внешнего вида монокристаллической пластины, показывающий ее вращение между скрещенными поляроидами. Эта анимация практически точно совпадает с видом реального кристалла между скрещенными поляроидами, если его поворачивать. Это есть не точный, но надежный способ верификации полученного результата. Из всего этого можно сделать вывод, что напряжения определены корректно.

Список литературы: 1. Тесленко А.А. / Заводская лаборатория 2. – 1998. – Т.64, №8. – С. 42-44. 2. Гаврилюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В. / Функциональные материалы 2. – 1995. – №4. – С. 543. 3. Тесленко А.А. Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков. 1991. – 22 с. 4. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. и др. / Заводская лаборатория. – 1993. – Т. 59, № 2. – С. 64-66. 5. Тесленко А.А. Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 6. Тесленко А.А. Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. 7. Тесленко А.А. Автоматизация пьезооптических измерений. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. 8. Тесленко А.А. Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 32. – С.169-171. 9. Еременко С.Ю. / В кн.: Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – С. 9. 10. <http://www.photoelasticity.land.ru/>.

Поступила в редколлегию 15.11.2010

УДК 539.3

В.В.ТКАЧЕНКО, асп., НТУ «ХПИ»

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

У статті запропоновано метод дослідження статичної стійкості багатошарових пластин симетричної структури під дією стискаючих зусиль в серединній площині пластини. В основу методу покладено використання теорії R-функцій та варіаційного методу Рітца. Математична постановка виконана в рамках класичної та уточненої теорії першого порядку. Запропонований метод враховує неоднорідний докритичний стан пластини. Метод проілюстровано на конкретних задачах. З метою аналізу вірогідності та точності розробленого підходу виконано порівняння отриманих результатів з відомими в літературі. Також були одержані нові результати для деяких багатошарових пластин симетричної структури зі складною формою плану.

The problem of stability analysis of the symmetric laminated plates with complex shape is considered. The method is based on the application of the R-functions theory and variation Ritz's method. The proposed method takes into account heterogeneous subcritical state of plates. Mathematical problem statement is carried by using the classic theory and the refined first order plate theory like theory by Timoshenko. Some numerical results of the concrete problems are presented and compared with those existing in order to demonstrate the correctness and the accuracy of the present method. New results are obtained for some cross-ply laminated plates with complex shape.

Многослойные пластины широко используются для моделирования композитных элементов многих современных конструкций. Поэтому их исследование на прочность и устойчивость является актуальной проблемой [1, 2, 11]. В настоящей работе предложен метод решения этой проблемы для много-